

從純數、物理數學到工程數學

黃吉川教授

高等教育的教育目標

體驗
學習

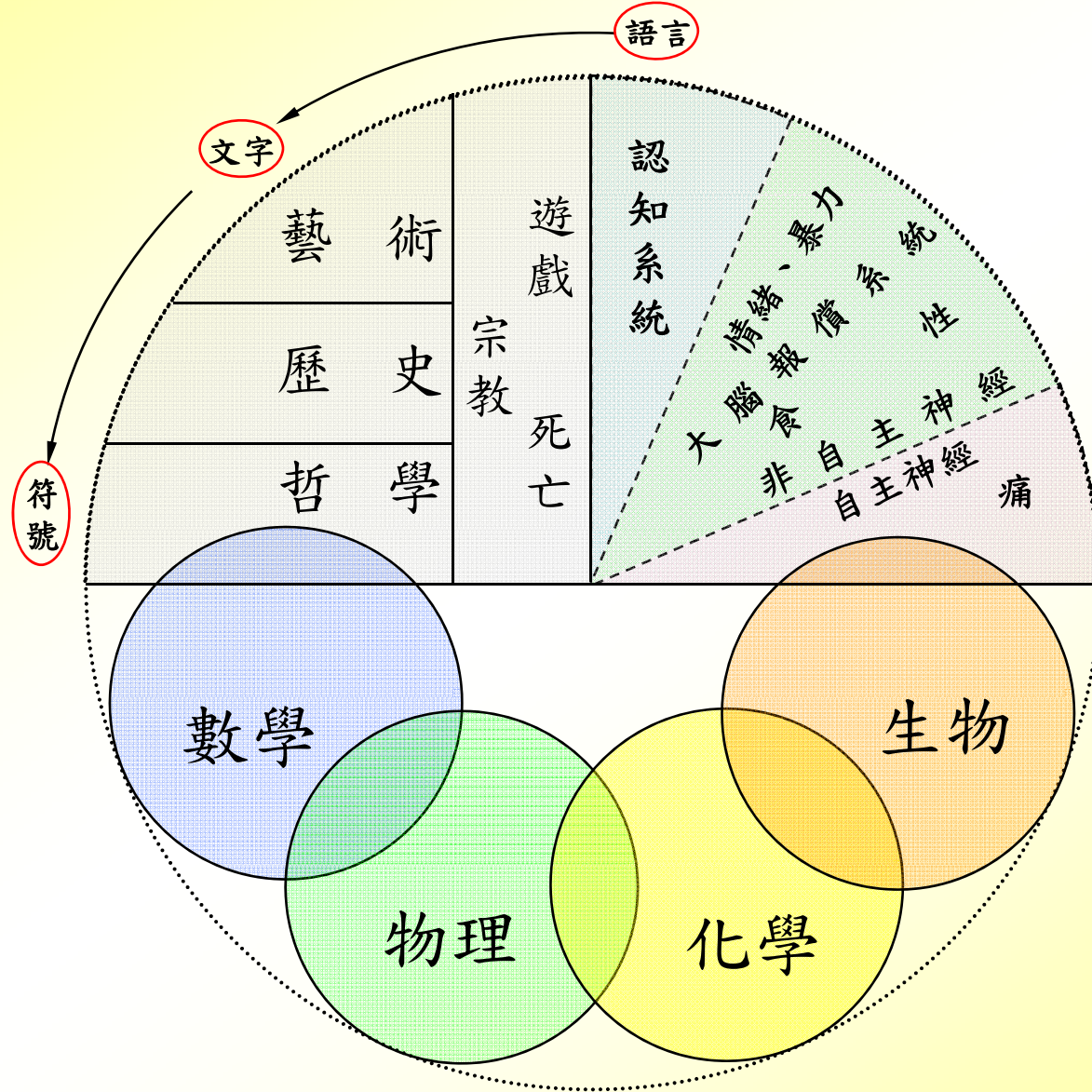
大學：
獨立學習
理解問題

碩士：
解決
問題

博士：
發掘
問題

高等課程
學位論文
發表國際期刊

學問之環



畢達哥拉斯 (Pythagoras)



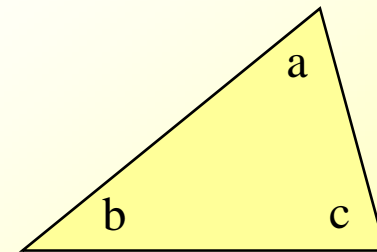
約公元前580-約公元前500

希臘哲學家，數學家，天文學家，生於希臘東部薩摩斯〔今希臘東部小島〕，卒於他林敦〔今意大利南部塔蘭托〕。

古希臘的畢氏定理(畢達哥拉斯)，乃源自古埃及大量土地量測之數據抽象而來，亦成為日後天文測量之理論依據。

● 證明了直角三角形的三個內角和是一百八十度。

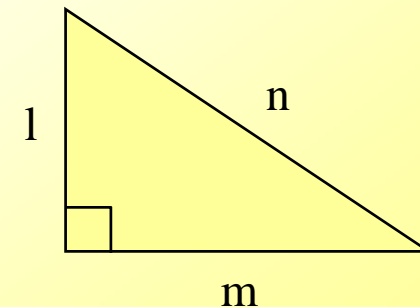
$$\angle a + \angle b + \angle c = 180^\circ$$



● 證明出畢氏定理

$$l^2 + m^2 = n^2$$

$$\sqrt{2} = ?$$



實數系

N 有序 $a > b$

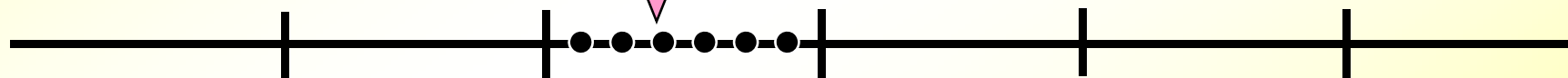
Q 稠密 $c = \frac{a+b}{2}$

R 完備

$a_n \in Q$

無理數：代數數 $a_n x^n + a_{n+1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

超越數 π, e 不可數



整數 (N)



實數 (R)

代數公理化

連續統假設

$$2^N \cong R$$

笛卡兒，Descartes(1596--1650)



1. 1596年3月31日生於法國圖爾(Touraine)附近的拉海鎮(La Haye，現名拉海—笛卡兒鎮)；1650年2月11日卒於瑞典斯德哥爾摩(Stockholm)。
2. 1612年，他到巴黎普瓦捷大學供讀法律，四年後獲頒博士學位，並成為律師。
3. 1637年以法文寫成的「方法論」，附設三短論及一篇序言分別為：「折光學」、「氣象學」、「幾何學」及「科學中正確運用理性和追求真理的方法論」。



普瓦捷大學

牛頓 Isaac Newton (1642.12.25 ~ 1727.3.20)



西元 1642 年聖誕節，牛頓誕生於英國 Woolsthorpe 的一個小鎮上，牛頓小時候，便已經展現出他的聰明與創造力。求學過程接觸了幾何學、光學、哥白尼的「地動說」，及伽利略、克卜勒的學說等，尤其對伽利略的學說特別偏愛。

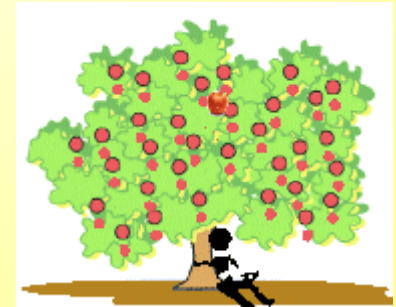
於1665-1666年間提出了重力的運動理論，使數學方程式成為理論真理的核心而拋開大量的數據與圖形。



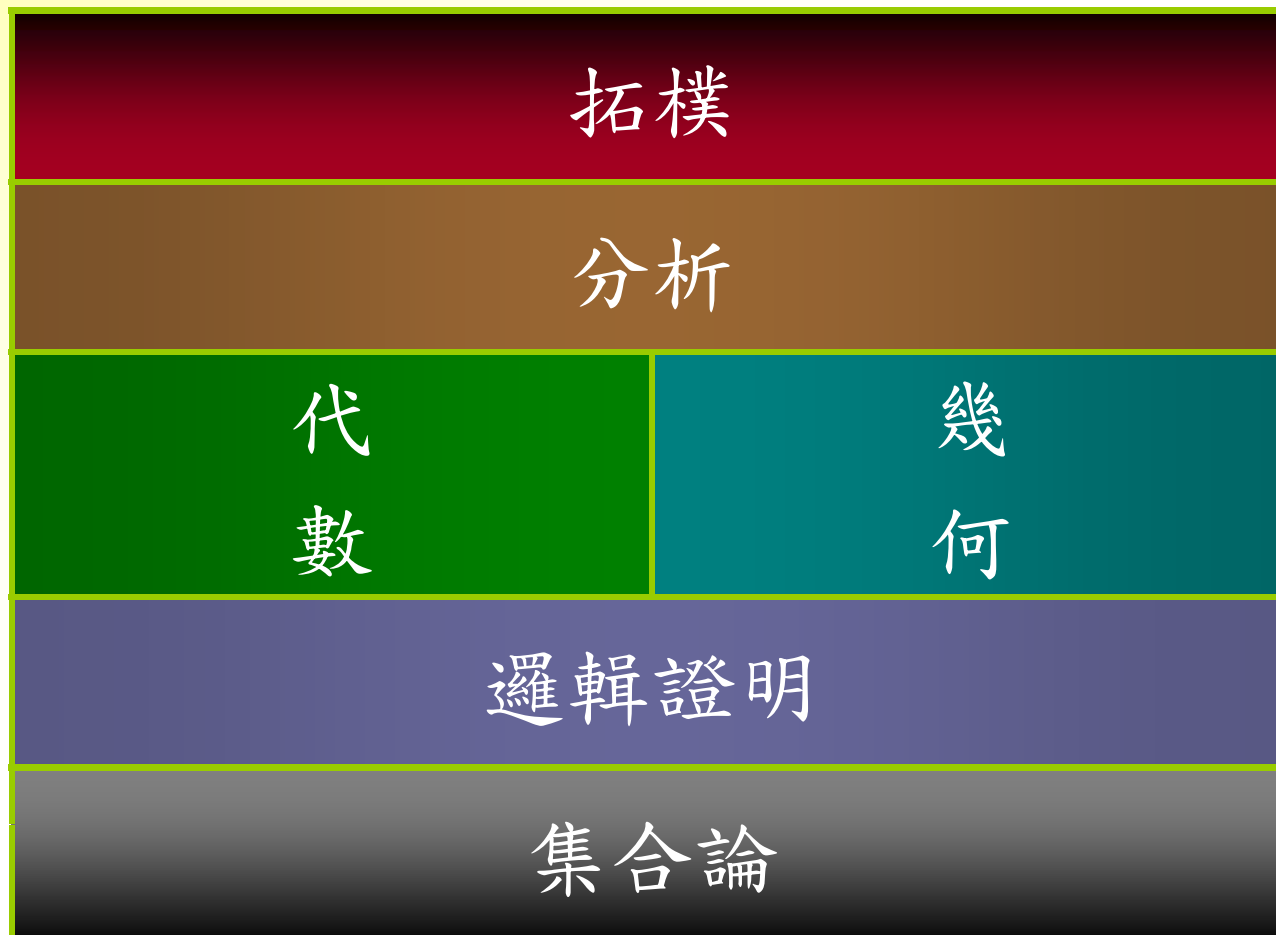
牛頓三大發現

- 「微積分法」的發現。
- 接下就是「重力的法則」。

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$



理論數學架構



理論物理之系統架構

超弦理論		迴圈量子論	
超對稱理論			
量子場論	量子色動力學 (強作用力)	弱-電統一理論 (弱電作用力)	量子重力理論
	量子電動力學 (電磁作用力)		
半古典論	相對論量子力學	電動力學	廣義相對論 (重力)
	非相對論量子力學		
統計力學	費米子統計	波色子統計	
	非平衡態統計力學		
	平衡態統計力學		
古典理論	巨觀傳輸理論	幾何光學	牛頓重力論

算術

數

四則運算

設

定

解

代數

變數
(X)

代數方程
(條件關係)

代數解
矩陣

微分
方程

場變量
($A(x), V_i(x), T_{ij}(x) \dots$)
微分幾何

微分方程
(物理定律)

正交函數
格林函數
逼近解

TABLE OF SUBJECTS

Levels							
A	A I	A II	A III	A IV	A V		
	Algebraic and differential topology	Differential geometry	Ordinary differential equations	Ergodic theory	Partial differential equations		
	A VI	A VII	A VIII	A IX	A X		
	Noncommutative harmonic analysis	Automorphic and modular forms	Analytic geometry	Algebraic geometry	Theory of numbers		
B	B I	B II	B III	B IV	B V	B VI	B VII
	Homological algebra	Lie groups	"Abstract" groups	Commutative harmonic analysis	Von Neumann algebras	Mathematical logic	Probability theory
C			C I	C II	C III		
			Categories and sheaves	Commutative algebra	Spectral theory of operators		
D	D I	D II	D III	D IV	D V	D VI	
	Set theory	General algebra	General topology	Classical analysis	Topological vector spaces	Integration	

Nicholas Bourbaki

尼可拉·布爾巴基

生：西元1939年

卒：不詳

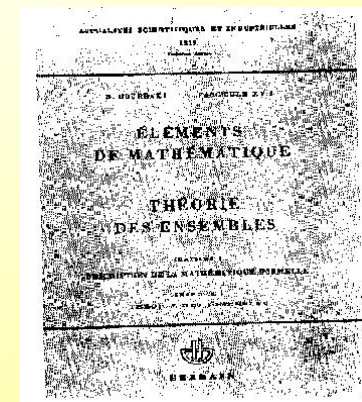
國籍：法國

著作：“數學原本” 1~36卷

學派代表人物：

嘉當, H. (Henri Cartan) : 1967-1970年任國際數學聯合會會長。1980年獲沃爾夫獎。

韋伊 (Andre Weil) : 1979年獲沃爾夫獎。



"尼可拉·布爾巴基" 所著的《數學原論》的書本封面

TABLE OF SUBJECTS

Levels						
A	A I	A II	A III	A IV	A V	
	Algebraic and differential topology	Differential geometry	Ordinary differential equations	Ergodic theory	Partial differential equations	
	A VI	A VII	A VIII	A IX	A X	
	Noncommutative harmonic analysis	Automorphic and modular forms	Analytic geometry	Algebraic geometry	Theory of numbers	
B	B I	B II	B III	B IV	B V	B VI
	Homological algebra	Lie groups	“Abstract” groups	Commutative harmonic analysis	Von Neumann algebras	Mathematical logic
						B VII
						Probability theory
C		C I	C II	C III		
		Categories and sheaves	Commutative algebra	Spectral theory of operators		
D	D I	D II	D III	D IV	D V	D VI
	Set theory	General algebra	General topology	Classical analysis	Topological vector spaces	Integration

David Hilbert (1862--1943)



1. 1880年秋天，希爾伯特進入哥尼斯堡大學，15年後他擔任了哥廷根大學的數學教授。
2. 主要貢獻在以下幾個方面：不變式論、代數數域理論、幾何基礎與一般數學基礎、積分方程和物理學。
3. 1900年8月6日，在第二屆國際數學家大會提出有名的Hilbert 23個問題。



哥廷根大學



Richard Courant (1888--1972)



Courant–Friedrichs–Lewy condition
the Courant minimax principle.



Born January 8, 1888, Lublinitz, Prussia, Ger. [now Lubliniec, Pol.]

Died January 27, 1972, New Rochelle, N.Y., U.S.

Residence Germany

Nationality German

Field Mathematician

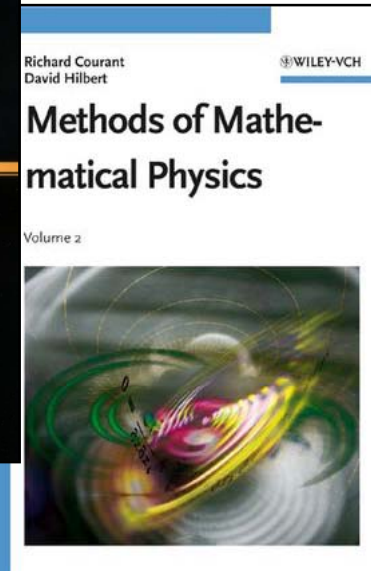
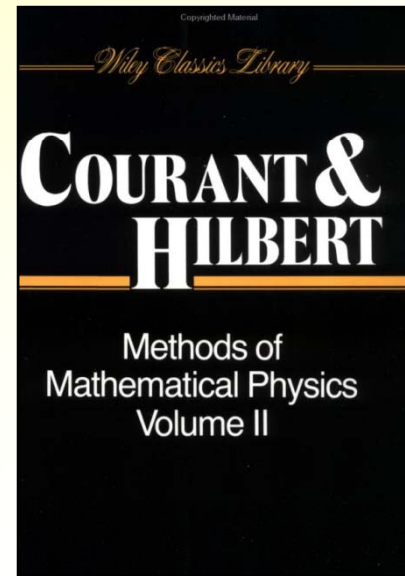
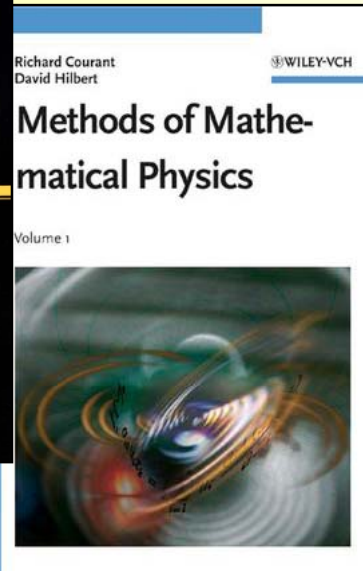
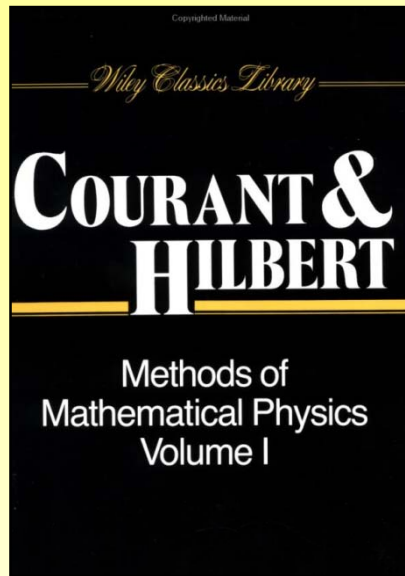
founded the Mathematical Institute (renamed as Courant Institute of Mathematical Sciences in 1964)

headed the Mathematical Institute as director from 1928 until 1933.

Institution Münster and New York University

Doctoral Advisor David Hilbert

Children Ernest Courant

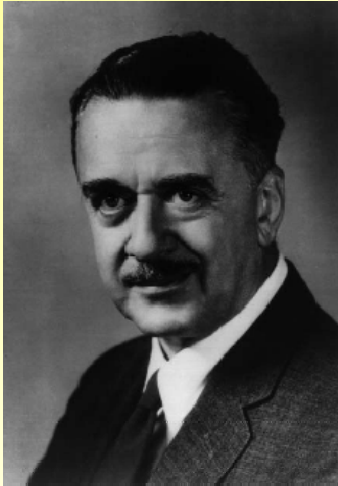


第一版：1937年出版

Table of contents:

- V-I: The Algebra of Linear Transformations and Quadratic Forms.
Series Expansion Arbitrary Functions.
Linear Integral Equations.
The Calculus of Variations.
Vibration and Eigenvalue Problems.
Application of The Calculus of Variations to Eigenvalue Problems.
Special Functions Defined by Eigenvalue Problems.
- V-II: General Theory of Partial Differential Equations of First Order.
Differential Equations of Higher Order.
Potential Theory and Elliptic Differential Equations.
Hyperbolic Differential Equations in Two Independent Variables.
Hyperbolic Differential Equations in More than Two Independent Variables.

Philip M. Morse



Founding ORSA President (1952)

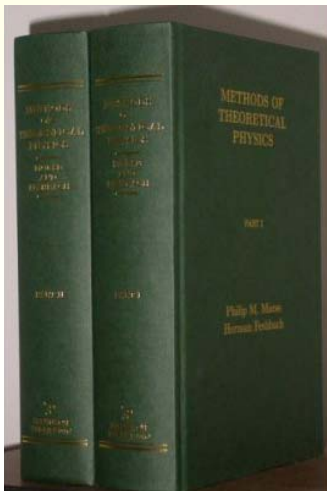
B.S. Physics, 1926, Case Institute;

Ph.D. Physics, 1929, Princeton University.

Faculty member at MIT, 1931-1969.



Methods of Theoretical Physics



Types of Fields

Equations Governing Fields

Fields and the Variational Principle
Functions of a Complex Variable

Ordinary Differential Equations

Boundary Conditions and Eigenfunctions
Green's Functions

Integral Equations

Approximate Methods
Solutions of Laplace's and Poisson's Equations

The Wave Equation

Diffusion, Wave Mechanics

Vector Fields

古典物理 量子物理

力學

電學

統計力學

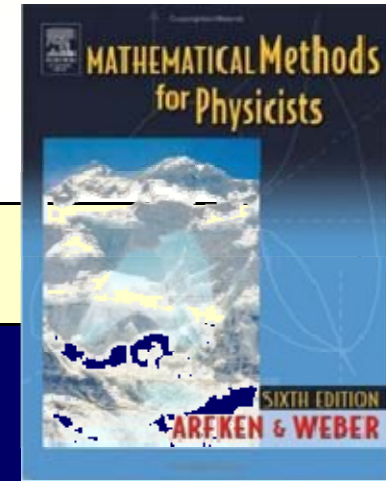
George Arfken



Professor Emeritus
at Miami University of Ohio



第一版：1966年出版
第六版：2005年出版



Vector analysis
Curved coordinate tensors
Determinants and Matrices
Group theory
Infinite Series
Function of Complex Variable

Differential Equations

Sturm-Liouville Theory
Gamma- Factorial Function
Bessel Functions
Legendre Functions
Special Functions
Fourier Series
Integral Transforms

Integral Equations

Calculus of Variations
Nonlinear Methods and Chaos

Advanced Engineering Mathematics

Review of Prerequisites

Vectors and Vector Spaces

Matrices and Systems of Linear Equations

Eigenvalues, Eigenvectors, and Diagonalization

First Order Differential Equations

Second and Higher Order Linear Differential Equations and Systems

The Laplace Transform

Series Solutions of Differential Equations, Special Functions, and Sturm–Liouville Equations

Fourier Series

Fourier Integrals and the Fourier Transform

Vector Differential Calculus

Vector Integral Calculus

Analytic Functions

Complex Integration

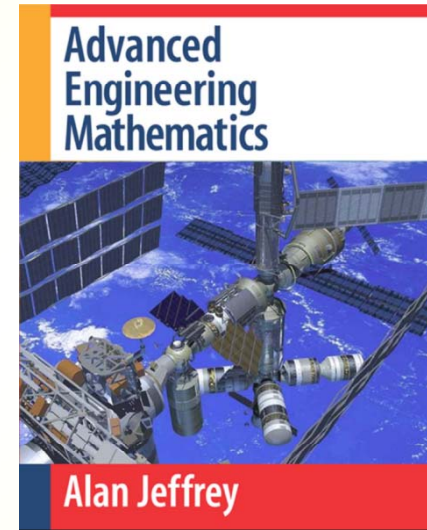
Laurent Series, Residues, and Contour Integration

The Laplace Inversion Integral

Conformal Mapping and Applications to Boundary Value Problems

Partial Differential Equations

Numerical Mathematics



電機
光電
機械
土木
化工
⋮

朱越生



生於1915.4.8

1932.7 — 1936.6 國立上海交通大學 航太工程系

1945.9 — 1946.6 美國聖路易華盛頓大學 工程數學研究所

1954.8 — 1956.8 台灣省立工學院機械工程系 教授

1965.8 — 1966.7 台灣省立成功大學工程科學系 創系系主任

1971.7—1985.8 國立成功大學工程科學系 教授

卒於1997.12.26



1972年第一版
1999年第十一版

第一章 概論、基本項目之複習及其他

第二章 無窮級數與冪級數

第三章 由定積分所定義之特殊函數

第四章 常微分方程總論及一階常微分方程

第五章 高階線性常微分方程、聯立常微分方程及全微分方程

第六章 Fourier(福里哀)氏級數、積分式及變換式

第七章 常微分方程之冪級數解法及數種特殊函數

第八章 Laplace(拉伯拉斯)氏變換及其在常微分方程中之運用

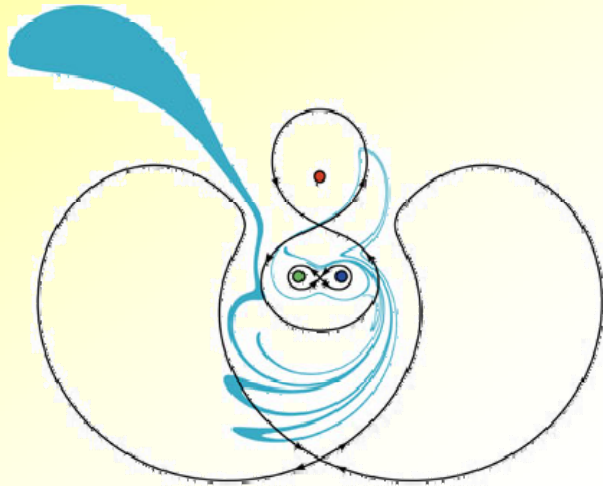
第九章 向量分析

第十章 矩陣

第十一章 複變數函數

第十二章 偏微分方程

Journal of Mathematical Physics



Cover image

**Lobe formation process (blue)
in a particular restricted four-vortex configuration.
Courtesy of S. D. Ross.**

Classical Mechanics
Conformal Field Theory
Dynamical Systems
Electromagnetic Theory (mathematical aspects)
Ergodic Theory
Fluid Mechanics (Navier–Stokes equations, models of turbulence)
Gauge Field Theory
General Relativity
Gravitation Theory (classical and quantum)
KAM Theory (stability and chaos)
Kinetic Theory
Many-Body Theory
Mathematical Methods in Condensed Matter Physics
Methods in Mathematical Physics
Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics
Percolation Models
Quantum Chaos
Quantum Computing
Quantum Field Theory (algebraic and constructive)
Quantum Mechanics
Renormalization
Scattering Theory (classical and quantum)
Schrödinger Equation (mathematical properties)
Semiclassical Analysis
Spectral Theory
Statistical Mechanics (equilibrium and nonequilibrium)
String and Brane Theory
Symmetries
Symplectic Dynamics
Supersymmetry

高等工程數學

- 一 代數與群論
- 二 分析與拓樸
- 三 張量與微分式
- 四 物理法則與統御方程
- 五 正交函數
- 六 積分轉換
- 七 格林函數
- 八 變分法
- 九 微擾法
- 十 可積系統與孤立子
- 十一 分歧與劇變理論

高等應用數學 Advanced Applied Mathematics

參考書目

章節	名稱	書名	作者	出版社	ISBN
1	R ⁿ 空間	高等微積分Advanced Calculus (上)	趙文敏	五南圖書出版公司	957-112-151-7
		Analysis by Its History	E. Hairer & G. Wanner	Springer	038-794-551-2
		Limits: A New Approach to Real Analysis	Alan. F. Beardon	Springer	038-798-274-4
		Mathematical Analysis 2 nd Edition	Apostol	PEARSON	986-154-103-9
		Real Analysis: A Historical Approach	Saul Stahl	JOHN WILEY&SONS, INC	
2	度量空間	微積分及分析之基礎：邏輯、集合、數、拓樸概念	K. G. Binmore 徐信之譯	凡異出版社& 北京大學出版社	957-694-052-4
		Metric Spaces 2 nd Edition	Pawan K. Jain & Khalil Ahman	Alpha Science International Ltd.	184-265-170-6
		Metric Spaces	E. T. Copson	Cambridge University Press	052-104-722-6 052-135-732-2
3	拓樸空間	點集拓樸學：題解與反例	陳肇姜	南京大學出版社	730-502-999-8
		點集拓樸講義	熊金成	高等教育出版社	704-003-101-9
		點集拓樸學	陸文釗、陳肇姜	南京大學出版社	730-501-301-3
		Differential Forms in Mathematical Physics	C. von Westenholz	North-Holland	044-485-465-5
		General Topology	Seymour Lipschutz	McGraw-Hill	007-099-011-5
		Point Set Topology	Steven A. Gaal	歐亞圖書有限公司	
		Theory and Examples of Point-Set Topology	John Greever	淡江書局有限公司	