變 分 學

7.1 函數及其極值

在 n 元可微函數 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的通常極大值與極小值的理論中，f 在定義域中某一點達到極值的必要條件 (第 357 頁) 是

$$df=0\text{或}\operatorname{grad}f=0\text{或}f_{x_i}=0\ (i=1,\cdots,n). \tag{1}$$

這些方程表明了函數 f 在該點的 逗留特性. 至於這些逗留點是否確是極大或極小點，就祇能取決於進一步的研究. 極值的充分條件是取 不等式 的形式 (見第 357 頁), 跟方程 (1) 大不一樣.

變分學也是討論極值 (或逗留值) 問題的，但是在完全新的情況下. 現在，那些我們求極值的函數不再依賴於在某區域内的一個自變量或有限個自變量了，而是叫做 泛函 或函數的函數了. 明確地說，爲了確定它們，我們需要知道一個或多個函數或曲線 (或曲面，看情形而定), 即所謂 自變函數.

約翰・貝努里在 1696 年對 最速降線問題 的陳述首先引起了對這類問題的普遍注意.

在垂直的 x,y 平面上，點 $A=(x_0,y_0)$ 與點 $B=(x_1,y_1)$ (設 $x_1>x_0$, $y_0>y_1$) 用一條光滑曲線 $y=u(x)$ 如此連接起來，使得質點在重力 (它的作用方向爲正 y 軸方向) 作用下，沿曲線無摩擦地從 A 滑行到 B 所用的時間是最短的.

問題的數學表達是根據物理的假設：沿這樣的曲線 $y=\phi(x)$, 速度 ds/dt (s 爲曲線的弧長) 正比於 $\sqrt{2g(y-y_0)}$, 即下落高度的平方根. 因

此質點下落所需的時間爲

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}}dx$$

(參考第一卷，第 426 頁). 如果我們捨去不重要的因子 $\sqrt{2g}$, 並且取 $y_0=0$ (我們可以做到這一點而無損於一般性), 我們就得到下面的問題：在所有的連續可微函數 $y=\phi(x)$ ($y\geq 0$ 且 $\phi(x_0)=0$, $\phi(x_1)=y_1$) 中，尋找一個函數，使得積分

$$I\{\phi\}=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx \tag{2a}$$

有最小的可能值.

在第 855 頁上，我們將得到結果 (曾使貝努里的同代人感到震驚): 曲線 $y=\phi(x)$ 必定是旋輪線. 這裡我們要强調，貝努裡問題跟初等的極大值和極小值問題是完全不同的. 表達式 $I\{\phi\}$ 依賴於函數 ϕ 的全過程. 由於 ϕ 不能用自變量的有限個值來描述，因此 I 是一種新類型的函數. 我們用花括號來指出它的 "函數 $\phi(x)$ 的函數" 的特徵.

下面是另一個性質類似的問題：兩點 $A=(x_0,y_0)$ 與 $B=(x_1,y_1)$ $(x_1>x_0,y_0>0,y_1>0)$ 用一條位於 x 軸上的曲線 $y=u(x)$ 連接起來，使得當這條曲線繞 x 軸轉動時所成的旋轉曲面的面積是盡可能地小.

利用在第 527 頁上給出的旋轉曲面的面積表達式，並且捨去不重要的因子 2π, 我們有該問題如下的數學陳述：在所有的連續可微函數 $y=\phi(x)$ ($\phi(x_0)=y_0$, $\phi(x_1)=y_1$, $\phi(x)>0$) 中，尋找一個函數，使得積分

$$I\{\phi\}=\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}dx \quad [y=\phi(x)] \tag{2b}$$

有最小的可能值. 將會看到，其解答是一條懸鏈線.

在平面上尋找連結兩點 A 與 B 的最短曲線，這個初等的幾何問題屬於相同的範疇. 這個問題在分析上是：在一個區間 $t_0\leq t\leq t_1$ 上，尋找參數 t 的兩個函數 $x(t),y(t)$, 它們取預定的值 $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ 與 $y(t_0)=y_0$, $y(t_1)=y_1$, 並且使積分

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt \quad \left(\dot{x}=\frac{dx}{dt},\dot{y}=\frac{dy}{dt}\right) \tag{2c}$$

有最小的可能值．當然，其解答是一條直線．

在一個已知曲面$G(x,y,z)=0$上求測地線，即在曲面上用最短的可能曲線連接曲面上以(x_0,y_0,z_0)與(x_1,y_1,z_1)爲坐標的兩點，相應問題的解答就不是那樣簡單了．用分析的話來說，我們有下面的問題：設參數t的三個爲一組的函數$x(t),y(t),z(t)$，它們使方程

$$G(x,y,z)=0 \tag{3a}$$

成爲t的恒等式，而且$x(t_0)=x_0$，$y(t_0)=y_0$，$z(t_0)=z_0$與$x(t_1)=x_1$，$y(t_1)=y_1$，$z(t_1)=z_1$．在所有這些函數組中尋找一組使積分

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \tag{3b}$$

有最小的可能值．

在第379頁上已經討論的等週問題—— 求一條給定長度的閉曲線使它包圍最大的可能面積 —— 也屬於同一範疇．我們在前面已經證明了它的解答是一圓週[1]．

在這裡遇到的問題類型的一般提法如下：給定三元函數$F(x,\phi,\phi')$，它在定義域中是連續的，並且有一階和二階的連續導數．如果在這個函數F中我們用函數$y=\phi(x)$代替ϕ以及用導數$y'=\phi'(x)$代替ϕ'，那麼F就成x的函數，而且形如

$$I\{\phi\}=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{4}$$

的積分變成一個依賴於函數$y=\phi(x)$的確定數；即，它是一“對於函數$\phi(x)$計值的泛函”．

變分學的基本問題如下：

---

1) 那裡給出的證明祇適用於凸的曲線；然而，下面的注解能使我們把結果直接推廣到任何曲線：我們考慮曲線C的凸殼(即，包含C的最小的凸集)．它的邊界K由C的凸弧和那些跟C相切於兩點並且在C的凹部上搭橋的C的切線段組成．顯然，衹要C不是凸的，K內的面積就超過C內的面積，而且另一方面，K的週長要比C的短．如果我們現在使K連續擴張使得它永遠保持同類形狀，直到最後的曲線K'有預定的週長，那麼K'將是一條與C的週長相等然而包圍的面積要大的曲線．因此，在等週問題中，爲了得到最大面積，我們可以一開頭就以凸曲線爲限．

在所有定義在區間$x_0 \le x \le x_1$ 上,取預定的邊值$y_0 = \phi(x_0)$ 與 $y_1 = \phi_1(x)$,連續且有連續的一階與二階導數的函數中,尋找一個函數使得泛函$I\{\phi\}$ 有最小的可能值(或最大的可能值).

在討論這個問題時，本質的一點是加在函數 $\phi(x)$ 上的 容許條件. 作出值 $I\{\phi\}$ 祇需要 F 在用 $\phi(x)$ 代入後是 x 的分段連續函數，而這祇要導數 $\phi'(x)$ 分段連續就可得到保證. 但是我們對容許條件作了更嚴厲的要求：函數 $\phi(x)$ 的一階甚至二階導數是連續的. 當然，搜索極大值或極小值的領域因此受到限制. 然而，我們將會看到，這個限制實際上不影響到解，即在採用更大領域時的那些最合適的函數總可以在比較局限的具有連續的一階和二階導數的函數領域中找到.

這類問題在幾何與物理中是很常見的，這裡我們僅舉一例：幾何光學的基本原理. 我們考慮在 x, y 平面中的光束，並且假定光的速度是點 (x, y) 和方向 y' 的已知函數 $v(x, y, y')$ [設 $y = \phi(x)$ 爲光的軌線方程， $y' = \phi'(x)$ 爲相應的導數], 則費馬的最小時間原理可敘述成：

一光線在兩個已知點A, B 之間的實際軌線是使得光線通過它所用的時間小於光線通過任何其他從A 到B 的軌線所用的時間.

換言之，如果 t 是時間，而 s 爲任一連接點 A 與 B 的曲線的弧長，那麼光線通過曲面在 A 與 B 之間的那部分所花的時間等於積分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y, y')}dx. \tag{5}$$

光的實際軌線是由那個使這積分取最小的可能值的函數 $y = \phi(x)$ 確定的.

我們看到，尋找光線的軌線，這個光學問題是前述一般問題的特例，對應的

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}.$$

在大多數光學的例子中，光速 v 跟方向無關而祇是位置的函數 $v(x, y)$.

7.2 泛函極值的必要條件

a. 第一變分等於零

我們的目的是求出函數 $y=\phi(x)$ 使由 (4) 規定的積分產生極大值或極小值的必要條件，或用一般的述語，極值的必要條件. 我們運用的方法十分類似於在求一元或多元函數極值的初等問題中所用的方法. 我們假定 $y=\phi=u(x)$ 是解. 然後我們需要說明一個事實：(對於極小值) 當 u 由别的容許函數 ϕ 取代時，I 必定 **增加**. 而且，由於我們僅僅關心獲得必要條件，我們可限於考慮那些與函數 u 接近的任一特殊類屬的函數 ϕ, 即那些使得差 $\phi-u$ 的絶對值保持在預定界限之内的函數.

我們設想函數 u 是屬於以 ε 爲參數的單參數函數族，其構造如下：取在區間的邊界上爲零的任一函數 $\eta(x)$, 即對它有 $\eta(x_0)=0, \eta(x_1)=0$, 而且它在閉區間上處處有連續的一階和二階導數. 然後我們作函數族

$$\phi(x,\varepsilon)=u(x)+\varepsilon\eta(x).$$

表達式 $\varepsilon\eta(x)=\delta u$ 叫作 **函數u的變分**.[因爲 $\eta(x)=\partial\phi/\partial\varepsilon$, 所以符號 δ 表示當 ε 作爲自變量而 x 作爲參數時所得的微分] 如果我們把函數 u 與函數 η 一樣看成是固定的，那麽泛函的值

$$I\{u+\varepsilon\eta\}=G(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,u+\varepsilon\eta,u'+\varepsilon\eta')dx$$

就變成 ε 的函數；而且，u 給出 $I\{\phi\}$ 的極小值，這個假定蘊涵上述函數將在 $\varepsilon=0$ 處獲得極小值. 由此作爲必要條件我們得方程

$$G'(0)=0, \tag{6a}$$

並且還有不等式

$$G''(0)\geq 0. \tag{6b}$$

對於極大值相應的必要條件有相同的方程 $G'(0)=0$ 和相反的不等式 $G''(0)\leq 0$. 條件 $G'(0)=0$ 對一切函數 η 必定成立，其中 η 除了滿足前面的條件外是任意的.

撇開極大值與極小值之間的判别問題，我們説：如果函數 u 對所有的函數 η 都滿足方程 $G'(0)=0$, 那麽積分 I 對 $\phi=u$ 是 **逗留的**. 假

如象以前那樣，我們用符號 δ 表示對於 ε 的微分，我們還說：當方程

$$\delta I = \varepsilon G'(0) = 0$$

由函數 $\phi = u$ 和任意的 η 所適合時，它表達了 I 的逗留性質. 表達式

$$\varepsilon G'(0) = \varepsilon\left\{\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, u+\varepsilon\eta, u'+\varepsilon\eta')dx\right\}_{\varepsilon=0} \tag{6c}$$

稱之爲積分的 **變分**, 或更確切的， **第一變分**[1]. 所以， **積分的逗留性質** 與 **第一變分等於零** 完全意味着同一件事.

逗留性質對於極大值或極小值的出現是 **必要的**, 但是，正如通常極大值或極小值的情況一樣，它不是這兩種可能性中的某一種出現的 **充分** 條件. 我們在這裡將不研究充分性問題：以下，我們衹考慮逗留性的問題.

我們的主要目標是按這樣的方式變換積分的逗留性條件 $G'(0) = 0$, 使得它成爲衹是 u 而不再含任意函數 η 的條件.

習　題　7.2a

1. 聯繫最速降線問題 (見第 856–857 頁), 當點 A 與 B 用直線連接時，計算降落時間.

2. 設球坐標 (r, θ, ϕ). 令在三維空間中運動的一質點的速度爲 $v = 1/f(r)$. 該質點要用多少時間掃描點 A 與 B 之間的由參數 σ 給出的曲線弧 [曲線上點的坐標爲 $r(\sigma), \theta(\sigma), \phi(\sigma)$]?

b. 歐拉微分方程的推導

下面的定理構成變分學基本的判定標準：

積分

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi')dx \tag{7a}$$

---

1) **變分學** 一詞的應用由來於此，它指的意思是：在這個課題中我們研究 "函數的函數" 在獨立函數或自變函數由改變一參數 ε 而變動時的性態.

當 $\phi = u$ 時爲逗留的必要和充分條件是:u 爲容許函數,且滿足歐拉微分方程

$$L[u] = F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} = 0, \tag{7b}$$

或

$$F_{u'u'} u'' + F_{uu'} u' + F_{xu'} - F_u = 0. \tag{7c}$$

爲了證明這一點，我們注意到表達式

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta') dx$$

對 ε 求微分可以在積分號下進行 (參考第 77 頁), 倘若微分所得的 x 的函數是連續的或至少是分段連續的．此時，令 $u + \varepsilon\eta = y$ 並且微分，由於對 f, u 和 η 所作的假設，我們在微分號下得到的表達式 $\eta F_y + \eta' F_{y'}$ 滿足剛才所講的條件．因此，我們立即得到

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [\eta F_u(x, u, u') + \eta' F_{u'}(x, u, u')] dx. \tag{7d}$$

爲了後面的用途，我們指出：在推導這個方程時，除了函數 u 和 η 的連續性及其一階導數的分段連續性以外，我們什麼也没有用到．在這個方程中，任意函數在積分號下以雙重形式，即 η 和 η' 出現．然而，用分部積分，我們立即可去掉 η'; 由 $\eta(x_0)$ 和 $\eta(x_1)$ 等於零的假定，我們有

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \eta' F_{u'} dx &= \eta F_{u'} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \Big(\frac{d}{dx} F_{u'} \Big) dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \eta \Big(\frac{d}{dx} F_{u'} \Big) dx. \end{aligned}$$

在這個分部積分中我們應當假設表達式 $\dfrac{d}{dx} F_{u'}$ 有定義而且可積，而由於我們假定了 F 二階導數的連續性，所以情況確實如此．於是，如果我們簡寫

$$L[u] = F_u - \frac{d}{dx} F_{u'}, \tag{7e}$$

那麽我們有方程

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta L[u] dx = 0. \tag{7f}$$

對於每一個滿足我們的條件，而在其他方面則是任意的函數 η, 這個方程必須成立. 從這一點，而且根據下面的引理得出結論：

$$L[u] = 0. \tag{7g}$$

引理 I. 如果函數$C(x)$ 在所考慮的區間内連續而且對任意函數$\eta(x)$ (使得$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ 與$\eta'(x)$ 爲連續)滿足關係式

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) C(x) dx = 0.$$

那麽對區間内的一切x 值有$C(x) = 0$. (這個引理的證明放到第 865 頁.)

但是，我們可以用不同的方法 [1] 得到條件 (7g): 由分部積分法可以在方程

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta F_u + \eta' F_{u'}) dx = 0$$

中消去 η, 因爲如果在分部積分時我們爲了簡單起見寫成 $F_{u'} = A$, $F_u = b = B'$, 並且記住 η 的邊條件，我們就得到

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta F_u dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta B' dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta' B dx.$$

如果我們置 $\zeta = \eta'$, 我們就有類似於 (7f) 的條件

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta (A - B) dx = 0. \tag{7h}$$

在推導這個公式時我們不需要對 η 與 u 的二階導數作任何假定. 相反，衹要假定 ϕ (或 u 和 η) 連續且有分段連續的一階導數就足够了. 方程 (7h) 不是對任意的 (分段連續) 函數 ζ 必定成立，而衹是對那些在端點滿足我們那些條件的函數 $\eta(x)$ 的導數 ζ 才成立. 然而，若 $\zeta(x)$ 是任意給定的分段連續函數，且滿足關係

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x) dx = 0, \tag{7i}$$

1) 第一個方法是拉格朗日的，而第二個方法是雷蒙的.

我們就可以使

$$\eta = \int_{x_0}^{x} \zeta(t)dt;$$

於是我們構造了一個可容許的 η, 這是因爲 $\eta' = \eta$ 和 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. 我們從而得到下面的結果:

積分爲逗留的必要條件是

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(A - B)dx = 0, \tag{7j}$$

其中 ζ 是一個僅僅滿足條件(7i)的任意的分段連續函數.

現在我們需要借助下述引理

引理 II. 如果分段連續函數 $S(x)$ 滿足條件

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta S dx = 0, \tag{8a}$$

其中任意函數 $\zeta(x)$ 在區間内分段連續而且

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta dx = 0, \tag{8b}$$

那麼 $S(x)$ 是一個常數.

這個引理也將在下面第 851 頁得到證明. 如果在證明之前我們假定它是正確的, 那麼由 (7h)—— 衹要我們代以上面 A 和 B 的表達式 —— 推出

$$\int_{x_0}^{x} F_u dx + c = F_{u'}.$$

由於 F_u 是分段連續的, 上式左端作爲一不定積分可以對 x 微分而且其導數爲 F_u; 所以同樣對右端做也是正確的. 因此, 對於所設的解 u, 表達式 $(d/dx)F_{u'}$ 存在, 而且方程

$$F_u = \frac{d}{dx} F_{u'} \tag{9a}$$

在 u' 的所有連續點上成立.

於是，當容許函數類 $\{\phi(x)\}$ 一開始就擴充成爲衹要求 $\phi(x)$ 的一階導數分段連續，那麼歐拉方程仍舊是極值的必要條件，或積分爲逗留的條件.

歐拉方程是二階 常微分方程, 它的解叫作極小值問題的 極值曲線. 爲了解決極小值問題，我們須在所有的極值曲線之中找出一條滿足預定邊條件的曲線.

如果 勒讓德條件

$$F_{u'u'} \neq 0 \tag{9b}$$

對 $\phi = u(x)$ 成立, 那麼該微分方程可以變成 "正規的" 形式 $u'' = f(x, u, u')$, 其中右邊是含 x, u, u' 的已知表達式.

c. 基本引理的證明

現在我們來證明上面用過的兩個引理. 爲了證明引理 I, 我們假定在某一點，比如說 $x = \xi$, $C(x)$ 不是零而且是正的. 於是，由於 $C(x)$ 是連續的，我們自然可以劃出一個 (x_0, x_1) 的子區間

$$\xi - a \leq x \leq \xi + a, \tag{9c}$$

使得 $C(x)$ 在其中仍舊是正的. 我們現在選取一個二次可微的 η, 它在此子區間内爲正而在别處爲零，比如說，對 (9c) 中的 x, 令

$$\eta(x) = (x - \xi + a)^4 (x - \xi - a)^4 = \{(x - \xi)^2 - a^2\}^4.$$

這個函數確實滿足所有的給定條件； $\eta(x)C(x)$ 在子區間的内部爲正而在外部爲零. 所以積分

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta C dx$$

不可能是零 [1]. 因爲這與我們的假設矛盾，所以 $C(\xi)$ 不可能是正的. 同理， $C(\xi)$ 也不可能是負的. 於是 $C(\xi)$ 如引理中所說的那樣，必定對區間内所有的 ξ 都等於零.

1) 一個連續的非負函數的積分一定是正的，除非被積函數到處等於零；這直接可從積分的定義推出.

爲了證明引理 II, 我們指出，關於 $\zeta(x)$ 的假設 (8b) 直接導致關係式

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x)\{S(x)-c\}dx = 0, \tag{10}$$

這裡 c 是任意常數. 我們現在這樣來選取 c, 使得 $S(x)-c$ 是一個容許函數 $\zeta(x)$; 即，我們用方程

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \zeta dx = \int_{x_0}^{x_1} \{S(x)-c\}dx = \int_{x_0}^{x_1} S(x)dx - c(x_1 - x_0)$$

來確定 c. 把 c 的這一值代入方程 (10), 並且取 $\zeta = S(x)-c$, 我們馬上得

$$\int_{x_0}^{x_1} \{S(x)-c\}^2 dx = 0.$$

因爲被積函數根據假設是連續的，或至少是分段連續的，所以推得

$$S(x) - c = 0$$

是 x 的恒等式，正如引理所說的那樣.

d. 一些特殊情形的歐拉微分方程的解. 例子

爲了求極小值問題的解，我們必須求歐拉微分方程在區間 $x_0 \leq x \leq x_1$ 上的一個特解，它在端點取預定的邊值 y_0 與 y_1. 因爲二階的歐拉微分方程的完全積分包含兩個積分常數，所以我們期望使這兩個常數適合邊條件 —— 積分常數必須滿足的兩個方程 —— 來唯一確定一個解.

一般說來，用初等函數或積分明顯地解出歐拉微分方程是不可能的，我們就衹得滿足於指明變分問題確實歸結爲一微分方程的問題. 另一方面，對於一些重要的特例，而且事實上對於大多數經典的例子，微分方程可以用積分法解出.

第一種情形是 F 不顯含導數 $y' = \phi'$: $F = F(\phi, x)$. 在這裡歐拉微分方程僅僅是 $F_u(u, x) = 0$; 就是說，它完全不再是一個微分方程了，而衹構成了解 $y = u(x)$ 的隱式定義. 這裡自然不存在積分常數的問題或滿足邊條件的可能性問題.

第二種重要的特殊情形是 F 不顯含函數 $y=\phi(x)$: $F=F(y',x)$. 在這裡歐拉微分方程是 $\frac{d}{dx}(F_{u'})=0$, 它立刻給出

$$F_{u'}=c,$$

其中 c 是一任意的積分常數. 我們可以用這個方程把 u' 表達成 x 與 c 的函數 $f(x,c)$, 於是我們有方程

$$u'=f(x,c),$$

由此用簡單的積分得到

$$u=\int_0^x f(\xi,c)d\xi+a,$$

即, u 表達成 x 和 c 連同另外一個任意的積分常數 a 的函數. 所以在這種情況下, 歐拉微分方程可以用積分徹底得解.

第三種情況 —— 對一些實例和應用是最重要的 —— 是 F 不顯含自變量 x : $F=F(y,y')$. 在這種情況, 我們有下面的重要定理:

如果自變量 x 在變分問題中不明顯地出現,那麼

$$E=F(u,u')-u'F_{u'}(u,u')=c \tag{11}$$

是歐拉微分方程的一個積分,即如果我們把關於 F 的歐拉微分方程是一個解 $u(x)$ 代入這表達式,那麼該表達式就變成一個與 x 無關的常數.

祇要我們求導數 dE/dx, 就可立刻推斷這個說法的正確性. 我們有

$$\frac{dE}{dx}=F_u u'+F_{u'}u''-u''F_{u'}-u'^2F_{uu'}-u'u''F_{u'u'},$$

或由 (7c),

$$\frac{dE}{dx}=u'L[u]=0;$$

因此, 對於歐拉微分方程的每一個解 u, 我們有 $E=c$, 其中 c 是常數.

如果我們把 u' 想作由方程 $E=c$ 算出的, 比如說 $u'=f(u,c)$, 那麼對方程

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{f(u,c)}$$

應用簡單的積分就得到 $u = g(u,c) + a$ (這裡 a 是另一積分常數); 即, x 表達成 u, c 和 a 的函數. 祇要解出 u, 我們就得到函數 $u(x,c,a)$. 因此, 歐拉微分方程依賴於兩個任意積分常數的一般解可以用積分法得到.

現在我們將用這些方法來討論若幹例子.

一般注解

有一類一般的例子, 其中 F 的形式爲

$$F = g(y)\sqrt{1+y'^2}$$

這裡 $g(y)$ 祇是一個明顯地依賴於 y 的函數. 對於極值曲線 $y = u$, 我們最後的那個法則立刻給出

$$g(u)\sqrt{1+u'^2} - \frac{g(u)u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} = c$$

或

$$\frac{g(u)}{\sqrt{1+u'^2}} = c;$$

於是

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{(\{g(u)\}^2/c^2) - 1}},$$

再進行積分, 我們得到方程

$$x - b = \int \frac{du}{\sqrt{(\{g(u)\}^2/c^2) - 1}}, \tag{12}$$

其中 b 是另一積分常數. 算出右邊的積分, 並且對 u 求解方程, 我們得到 u 爲 x 和兩個積分常數 c 和 b 的函數 [1].

最小面積的旋轉曲面

在這個情形, 由第 857 頁的 (2b), 我們有 $g = y$. 那積分 (11) 變成

$$x - b = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2/c^2) - 1}} = c \operatorname{arc\,cosh} \frac{u}{c};$$

---

1) 當然, 我們不見得能用初等函數解出 u, 但是對於所有實用的目的來說, 這些步驟足以完全確定 u 了.

因此，結果是

$$y = u = c\cosh\frac{x-b}{c},$$

即，求一條曲線，使它在轉動時給出一個有逗留面積的旋轉曲面，這個問題的解是一條 懸鏈線 (見第一卷，第 396 頁).

這樣的逗留曲線出現的必要條件是：兩個給定的點 A 和 B 可以用一條 $y > 0$ 的懸鏈線連接起來. 至於這懸鏈線是否真的表達了極小值，這個問題將不在這裡討論了.

最速降線

另一個例子是由取 $g = 1/\sqrt{y}$ 而得的. 根據第 857 頁的 (2a), 這就是 最速降線 的問題. 利用替換 $1/c^2 = k^2$, $u = k\tau$, $\tau = \sin^2(\theta/2)$, 則積分 (12)

$$\int\frac{du}{\sqrt{1/(uc)^2 - 1}}$$

立即變到

$$x - b = k\int\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}d\tau = \frac{k}{2}\int(1-\cos\theta)d\theta,$$

由此

$$x - b = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta),$$
$$y = u = \frac{k}{2}(1-\cos\theta).$$

最速降線從而是一條尖點在 x 軸上的普通旋輪線 (參考第一卷，第 349 頁).

習　題　7.2d

1. 對於下列的被積函數，求極值曲線：

(a) $F = \sqrt{y(1+y'^2)}$,

(b) $F = \sqrt{1+y'^2}/y$,

(c) $F = y\sqrt{1-y'^2}$.

2. 對於被積函數 $F = x^n y'^2$, 求極值曲線，並且證明：若 $n \geqq 1$, 則位於 y 軸兩側的兩個點不能用一條極值曲線連接起來.

3. 對於被積函數 $y^n y'^m$ (這裡 n 和 m 爲偶整數), 求極值曲線.

4. 對於被積函數 $F = ay'^2 + 2byy' + cy^2$ (這裡 a, b, c 是 x 的連續可微的給定函數), 求極值曲線. 試證歐拉微分方程是二階的常微分方程. 爲什麼當 b 是常數時, 這個常數就完全不進入微分方程?

5. 對於被積函數 $F = e^x\sqrt{1+y'^2}$, 證明極值曲線由方程 $\sin(y-b) = e^{-(x-a)}$ 和 $y = b$ (這裡 a, b 是常數) 給出. 討論這些曲線的形狀, 並且考查, 如果兩點 A 和 B 可用形如 $y = f(x)$ 的極值曲線弧連接起來, 那麼 A 和 B 該怎樣坐落?

6. 對於 F 不含導數 y' 的情形, 用初等方法推導出歐拉條件 $F_y = 0$.

7. 求一函數, 使它給出帶邊條件 (a) $y(0) = y(1) = 0$ 或 (b) $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ 的積分

$$I\{y\} = \int_0^1 y'^2 dx$$

的絕對極小值.

8. 求 $\int \sqrt{r^2 + r'^2}d\theta$ 的極值曲線, 即在極坐標下的最短路徑.

e. 歐拉表達式恒等於零的情形

在第 862 頁對於 $F(x, y, y')$ 的歐拉微分方程 (7c) 可能退化爲一個無意義的恒等式, 即每個容許函數 $y = \phi(x)$ 都適合的關係式. 換句話說, 對應的那個積分可能對任何容許函數 $y = \phi(x)$ 都是逗留的. 如果碰到這個退化的情形, 那麼不管用什麼函數 $y = \phi(x)$ 代入歐拉表達式

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'',$$

它在區間內的每一點 x 都必須等於零. 然而, 我們總可以找到一條曲線, 使得對於 x 的預定值, $y = \phi$, $y' = \phi'$ 與 $y'' = \phi''$ 取任意的預定值. 所以, 對於任何四個爲一組的數 x, y, y', y'', 歐拉表達式必須等於零. 我們斷定 y'' 的係數 (即 $F_{y'y'}$) 必須爲零. 於是 F 必定是 y' 的線性函數, 比如說, $F = ay' + b$, 這裡 a 與 b 僅是 x 和 y 的函數. 如果我們把這個 F 代入微分方程的其餘部分,

$$F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0,$$

那麼立即推出

$$0 = a_y y' + a_x - a_y y' - b_y$$

或

$$a_x - b_y$$

必須對 x 與 y 恒等於零. 換句説話，歐拉表達式恒等於零當且僅當積分的形式爲

$$I = \int \{a(x,y)y' + b(x,y)\}dx = \int ady + bdx,$$

其中 a 與 b 滿足我們在第 105 頁已經碰到過的可積性條件，即這裡的 $ady + bdx$ 是一個全微分.

7.3 推 廣

a. 具有多於一個自變函數的積分

求積分的極值 (逗留值) 的問題可以推廣到這個積分不是依賴於一個自變函數而是依賴於若幹個這種函數 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$ 的情形.

這種類型的標準問題可以敘述如下:

令 $F(x, \phi_1, \cdots, \phi_n, \phi_1', \cdots, \phi_n')$ 是 $(2n+1)$ 個變元 $x, \phi_1, \cdots, \phi_n'$ 的函數，它是連續的，並且在所考慮的區域内有直到二階的連續導數. 如果我們用具有連續的一階和二階導數的 x 的函數代替 $y_i = \phi_i$, 而用其導數代替 ϕ_i', 那麼 F 變爲 x 的單元函數，並且在區間 $x_0 \leq x \leq x_1$ 上的積分

$$I\{\phi_1, \cdots, \phi_n\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi_1, \cdots, \phi_n, \phi_n', \cdots, \phi_n')dx \tag{13}$$

由這些函數的選取而有一個確定值.

與極值相對照，我們把那些滿足上述連續性條件以及它們的邊值 $\phi_i(x_0)$ 和 $\phi_i(x_1)$ 取預定值的所有函數組 $\phi_i(x)$ 看作是容許的. 換句話説，我們在以 $y_1, y_2, \cdots, y_n, x$ 爲坐標的 $(n+1)$ 維空間中考慮那些連接

兩點 A 和 B 的曲線 $y_i = \phi_i(x)$. 現在，變分問題要求我們在所有這些函數組 $\phi_i(x)$ 中尋找一組

$$[y_i = \phi_i(x) = u_i(x)],$$

使得積分 (13) 取得極值 (極大值或極小值).

我們又將不討論極值的真實性質，而祇限於探究對於什麼自變函數組 $\phi_i(x) = u_i(x)$, 積分是逗留的.

我們完全用第 856 頁所用的同樣方法來定義逗留值的概念. 我們按照下面的方法把函數組 $u_i(x)$ 嵌入到依賴於參數 ε 的函數組的單參數族：令 $\eta_1(x), \cdots, \eta_n(x)$ 是 n 個任意選取的函數，它們在 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 的值等於零，而在區間上連續，且有連續的一階和二階導數. 我們把 $u_i(x)$ 嵌入到函數族

$$y_i = \phi_i(x) = u_i(x) + \varepsilon\eta_i(x)$$

之中.

項 $\varepsilon\eta_i(x) = \delta u_i$ 叫作函數 u_i 的 **變分**. 如果我們把 ϕ_i 的表達式代入 $I\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$, 那麼這個積分就變爲參數 ε 的函數

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u_1 + \varepsilon\eta_n, u_n + \varepsilon\eta_n, u_1' + \varepsilon\eta_1', \cdots, u_n' + \varepsilon\eta_n')dx.$$

當 $\phi_i = u_i$ (即，當 $\varepsilon = 0$) 時可能存在極值的必要條件是

$$G'(0) = 0$$

正如一個自變函數的情形一樣，如果不管怎樣選取具有上述附加條件的函數組 η_i 都有 $G'(0) = 0$ 成立，或

$$\delta I = \varepsilon G'(0) = 0$$

成立，那麼我們說積分 I 對於 $\phi_i = u_i$ 有逗留值. 換句話說，積分 **對於一固定函數組 $u_i(x)$ 的逗留性質跟第一變分 δI 等於零意味着一回事**.

問題仍舊是對於積分的逗留性質確立起不包含任意變分組 η_i 的條件. 這不需要新的概念. 我們着手進行如下：首先我們取 $\eta_2, \eta_3, \cdots, \eta_n$

恒爲零 (即，我們不讓函數 $u_2,\cdots,u_n$ 變動). 於是我們衹考慮第一個函數 $\phi_1(x)$ 作爲變元，從而由第 862 頁，條件 $G'(0)=0$ 等價於歐拉微分方程

$$F_{u_1}-\frac{d}{dx}F_{u_1'}=0.$$

因爲我們可同樣挑選函數組 $u_i(x)$ 中的任何一個，所以我們得到下面的結果：

積分(13)爲逗留的充要條件是這 n 個函數 $u_i(x)$ 滿足歐拉方程組

$$F_{u_i}-\frac{d}{dx}F_{u_1'}=0 \quad (i=1,\cdots,n). \tag{13a}$$

這是對於 n 個函數 $u_i(x)$ 的二階的 n 個微分方程的系統. 這個微分方程組的所有的解都叫作變分問題的 極值曲線. 因而，尋找積分的極值問題歸結爲求解這些微分方程並從通解選擇滿足邊條件的問題 [1].

b. 例子

給出歐拉微分方程組通解的可能性甚至比第 7.2 節的情形更爲渺茫了. 僅僅在很特殊的情形我們能夠明確地找到所有的極值曲線. 這裡與第 867 頁公式 (11) 的特殊情形類似，下面的定理是經常用到的：

如果函數 F 不顯含自變量 x, 即

$$F=F(\phi_1,\cdots,\phi_n,\phi_1',\cdots,\phi_n'),$$

那麼表達式 $E=F(u_1,\cdots,u_n,u_1',\cdots,u_n')-\sum_{i=1}^{n}u_i'F_{u_i'}$ 是歐拉微分方程組的一個積分. 即，如果我們考慮歐拉方程 (13a) 的任一組解 $u_i(x)$, 我們

---

1) 利用引理 II (第 864 頁，第 7.2 節), 我們可以在一般的假設 —— 容許函數衹有分段連續的一階導數 —— 下，證明這些微分方程必定成立. 然而，如果我們要想集中注意在主題的建立上，那麼在函數組 $\phi_i(x)$ 的可容性條件中包括二階導數的連續性是更爲方便的. 這樣，我們就能把表達式 $d/dx\ F_{u_i'}$ 寫成形式

$$\sum_{k=1}^{n}F_{u_i'}u_k'u_i'+\sum_{k=1}^{n}F_{u_k}u_i'u_k'+Fxu_i'. \tag{13b}$$

就有

$$E = F - \Sigma u_i' F^{u_i'} = \text{常數}c, \tag{13c}$$

在這裡，這個常數值當然依賴於所代入的那一組解．

證明可仿照第 867 頁的相同格式；我們對表達式的左邊關於 x 進行微分，並且利用 (13b), 就可驗證所得的結果等於零．

一個通俗的例子是在三維空間中求兩點之間最短距離的問題．這裡我們需要確定兩個函數 $y = y(x)$, $z = z(x)$, 使得積分

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

有最小的可能值，而 $y(x)$ 和 $z(x)$ 在區間端點的值是預定的．歐拉微分方程 (13a) 給出

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0,$$

由此立即推出導數 $y'(x)$ 和 $z'(x)$ 是常數；因此，極值曲線必定是直線．

在三維空間的最速降線問題就有點不簡單了．(重力的作用方向又取作沿正 y 軸的方向．) 這裡我們需要這樣確定 $y = y(x)$, $z = z(x)$, 使得積分

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{y}} dx = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', z') dx$$

是逗留的．在歐拉微分方程組中有一個方程給出

$$\frac{z'}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = a.$$

另外，我們由 (13c) 得

$$F - y'F_{y'} - z'F_{z'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + y'^2}} = b,$$

其中 a 與 b 是常數．相除後，即得 $z' = a/b = k$ 同樣是常數．所以使積分爲逗留的曲線必定在平面 $z = kx + h$ 內．從另一方程

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 + y'^2}} = b$$

如第 869 頁那樣顯然，可以推出這曲線必定又是旋輪線.

習　題　7.3b

1. 假設在三維空間中 (採用球坐標 r, θ, ϕ) 光速是 r 的函數 (參考第 861 頁第 2 題), 寫出光線的軌線微分方程. 證明光線是平面曲線.

2. 證明在球面上的測地線 (連接兩點的長度爲最短的曲線) 是大圓.

3. 在直立圓錐面上求測地線.

4. 證明在兩個不相交的光滑閉曲線之間距離爲極小的路徑是它們的公共法線.

5. 證明從一給定點到一給定曲線降落時間爲最少的軌線是一條與該曲線正交的旋輪線.

6. $\int F(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx$ 的端點在兩條曲線上自由移動的極值曲線跟那兩條曲線正交.

c. 哈密爾頓原理. 拉格朗日方程

歐拉微分方程組跟許多應用數學的分支，尤其是動力學，有很重要的聯繫. 特別，由有限個質點組成的力學系統的運動可以用某一表達式 —— 叫作哈密爾頓積分 —— 的逗留條件表達出來. 這裡我們將簡要地說明這種關係.

一個力學系統如果它的位置可由 n 個獨立的坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 確定的話，則它有 n 階的自由度. 例如，設系統由一個質點組成，則我們有 $n=3$, 這是因爲我們可以取 q_1, q_2, q_3 爲三個直角坐標或三個球坐標. 又設系統由兩個質點用剛性 —— 假設沒有質量 —— 連結起來且保持單位的距離，則 $n=5$, 這是因爲對坐標 q_i, 我們可以取其中一個質點的三個直角坐標和決定這兩個質點聯線方向的另兩個坐標.

用兩個函數 —— 動能和勢能 —— 足以一般地描述一動力系統. 如果系統在運動，那麼坐標 q_i 將是 t 的函數 $q_i(t)$, 而速度的分量 $\dot{q}_i =$

dq_i/dt. 相應於動力系統的動能是如下形式的函數

$$T(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \quad (a_{ik}=a_{ki}) \tag{14a}$$

所以動能是速度分量的齊次二次式，係數 a_{ik} 爲坐標 $q_1,\cdots,q_n$ 本身而不顯含 t 的函數 [1]).

假設動力系統由動能和另一個衹依賴於位置坐標 q_i 而不依賴速度或時間 [2]) 的勢能函數 $v(q_1,\cdots,q_n)$ 來描述.

哈密爾頓原理是：一動力系統在時間區間$t_0 \le t \le t_1$ 內從一個給定的初始位置到一個給定的最後位置的運動是這樣的運動,它使積分

$$H\{q_1,\cdots,q_n\}=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt \tag{14b}$$

在所有二階連續可微且對$t=t_0$ 和$t=t_1$ 取預定的邊值的函數類中是逗留的.

這個哈密爾頓原理是動力學的基本原理，它以簡練的形式包含了動力學的一些定律. 當應用哈密爾頓原理時，歐拉方程 (13a) 給出 拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{14c}$$

它們是理論動力學的基本方程組.

這裡我們將衹作一個值得注意的推導，即 能量守恒律.

因爲哈密爾頓積分的被積函數不明顯地依賴於自變量 t, 所以對於動力微分方程的解 $q_i(t)$, 表達式

$$T-U-\sum \dot{q}_i\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i}$$

1) 爲了得到動能 T 的這個表達式，我們想象系統的質點，其各自的直角坐標表成爲坐標 $q_1,\cdots,q_n$ 的函數，則各個質點速度的直角分量可以表成 $\dot{q}_i$ 的線性齊次函數；因此，我們再作動能的初等表達式，即各自的質量與相應速度平方的乘積之和的一半.

2) 我們在這裡限於討論作用力與時間無關且是保守的力學系統. 如在力學教科書中所證明的那樣，勢能確定了作用於系統的外力. 系統在一個位置轉移到另一個位置時，作了機械功；這個功等於相應的 U 值之間的差，而不依賴於從這個位置到另一位置的特殊的運動.

必定是常數 [見 (13c)]. 由於 U 不依賴於 $\dot{q}_i$, 且 T 是 $\dot{q}_i$ 的齊次二次函數，所以

$$\sum \dot{q}_i \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} = \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

因此

$$T + U = 常數;$$

即，**在運動過程中動能與勢能之和不隨時間變化**.

d. 含高階導數的積分

類似的方法可以用來解決下面的積分極值問題：在被積函數 F 中不僅包含所求的函數 $y=\phi$ 和它的導數，而且還包含高階導數. 例如，假設我們欲求形式爲

$$I\{\phi\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi', \phi'')dx \tag{15a}$$

的積分極值，這裡的極值相對於那些可容許的函數 $y=\phi(x)$ 而言，即 $\phi(x)$ 連同其一階導數在區間的端點取預定的值，而且 $\phi(x)$ 有直到四階的連續導數.

爲了找到極值的必要條件，我們又假設 $y = u(x)$ 是所求的函數. 我們把 $u(x)$ 嵌入到一函數族 $y = \phi(x) = u(x) + \varepsilon\eta(x)$, 其中 ε 爲一任意參數和 $\eta(x)$ 爲一任意選取的四階連續可微的函數，並且 $\eta(x)$ 連同 $\eta'(x)$ 在端點都等於零. 從而，積分變成形式 $G(\varepsilon)$, 而且對於一切選取的函數 $\eta(x)$, 必要條件

$$G'(0) = 0 \tag{15b}$$

必須成立. 仿照與第 862 頁相同的方法，我們在積分號下求微商，因而得到上述條件的形式爲

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta F_u + \eta' F_{u'} + \eta'' F_{u''})dx = 0, \tag{15c}$$

祇要用 u 代替 $\phi(x)$. 分部積分一次，我們就把含 $\eta'(x)$ 的項化成一個含 η 的項，而分部積分二次，我們又把含 $\eta''(x)$ 的項化成一個含 η 的項，

再把邊條件考慮在內，我們容易得到

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta\Big(F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{u''})dx=0. \tag{15d}$$

因此，極值的必要條件 (即，積分爲逗留的條件) 是歐拉微分方程

$$L[u]=F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{u''}=0 \tag{15e}$$

讀者可自己驗證，這是一個四階的微分方程 [1]).

e. 多自變量

求極值必要條件的一般方法可照樣應用於積分不再是單重積分而是多重積分時. 令 D 爲 x,y 平面上由曲線 Γ 圍成的已知區域. 我們假設 D 和 Γ 是足够規則的，使得可以允許應用分部積分 (第 652 頁) 的. 令 $F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)$ 是它的五個變元的二次連續可微的函數. 設在 F 中我們用一個函數 $\phi(x,y)$ 替代 ϕ, 而 $\phi(x,y)$ 在 Γ 上取預定的邊值和在 D 內有直到二階的連續導數，又設用 ϕ 的偏導數替代 ϕ_x 和 ϕ_y, 那麽 F 變成 x 和 y 的一個函數，而且積分

$$I\{\phi\}=\iint_D F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)dxdy \tag{16a}$$

有一個與 ϕ 的選取有關的值. 問題在於尋求一個函數 $\phi=u(x,y)$, 使得這個值是一極值.

爲了找到必要條件，我們又採用老方法. 選取一個在邊界 Γ 上等於零的函數 $\eta(x,y)$; 它有直到二階的連續導數；而除此以外，它是任意的. 我們假設 u 是所求的函數，而 ε 是任意參數，然後把 $\phi=u+\varepsilon\eta$ 代入積分. 這積分又變爲 ε 的函數 $G(\varepsilon)$, 而且極值的必要條件是

$$G'(0)=0.$$

象以前一樣，這個條件取下面的形式

$$\iint_D(\eta F_u+\eta_x F_{u_x}+\eta_y F_{u_y})dxdy=0. \tag{16b}$$

---

1) 從 (15d) 推導 (15e) 時，我們須要在引理 1 (第 862 頁) 中限制函數 η 屬於 C^4 類，而且 η 和 η' 在端點等於零. 從第 864 頁引理的證明中明顯可見，這個結論在這些比較局限的條件下也成立.

爲了消除在積分號下的 η_x 和 η_y 的項，我們把其中一項對 x 進行分部積分，而把另一項對 y 進行分部積分. 因爲 η 在 Γ 上等於零，所以在 Γ 上的邊值不出現了，而我們有

$$\iint \eta\Big[F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\Big]dxdy = 0. \tag{16c}$$

引理 I(第 863 頁) 可以立刻推廣到多於一的維數，而且我們立即得到歐拉的二階偏微分方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0. \tag{16d}$$

例子

1. $F = \phi_x^2 + \phi_y^2$. 如果我們略去因子 2, 那麼歐拉微分方程變成

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

即，從一變分問題得到了拉普拉斯方程.

2. 極小曲面. 柏拉梯奧問題是這樣的：在一個區域 D 上，求一曲面 $z = f(x, y)$, 它通過一預定的其投影爲 Γ 的空間曲線，並且它的面積

$$\iint_D \sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2}\,dxdy$$

爲極小.

這裡的歐拉微分方程是

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} = 0,$$

或，以展開的形式，

$$u_{xx}\big(1+u_y^2\big) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}\big(1+u_x^2\big) = 0.$$

這是著名的極小曲面的微分方程，我們已在别處對它進行了廣泛的研究 [1].

1) R. Courant, Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces, Interscience: New York, 1950.

7.4 含附帶條件的問題. 拉格朗日乘子

在第 3 章 (第 333 頁) 對多元函數通常的極值討論中，我們考慮了對那些變元加某些附帶條件的情形. 在這種情形，不定乘子法對函數可能有逗留值導出了一個特別清楚的表達式. 類似的方法在變分學中甚至是更重要的. 在這裡我們將僅僅簡要地討論一些最簡單的情形.

a. 通常的附帶條件

一個典型的例子是：在三維空間中，求一條表成參數 t 的曲線 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$, 它服從附帶條件 —— 曲線位於給定的曲面 $G(x, y, z) = 0$ 上，並且通過該曲面上兩個給定的點 A 和 B. 於是，問題是從那些服從附帶條件 $G(x, y, z) = 0$ 和通常的邊界條件以及連續性條件的函數組 $x(t), y(t), z(t)$ 中進行適當的選取，使得形式爲

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})dt \tag{17}$$

的積分是逗留的. 這個問題可直接歸結爲在第 871 頁已討論過的情形. 我們假設 $x(t), y(t), z(t)$ 爲所求的函數. 再設所求曲線所在的那部分曲面可以表示成形式 $z = g(x, y)$; 衹要 G_z 在曲面的這部分上異於零，這一點確是可能的. 如果我們假設在所討論的曲面上三個方程 $G_x = 0$, $G_y = 0, G_z = 0$ 不同時成立，並且如果我們限於考慮曲面的充分小的一塊，那麼我們可以不失一般性設 $G_z \neq 0$. 把 $z = g(x, y)$ 和 $\dot{z} = g_x\dot{x} + g_y\dot{y}$ 代入積分內，我們得到一個以 $x(t)$ 和 $y(t)$ 爲彼此獨立函數的問題. 從而，我們可以直接應用第 873 頁的結論，而且對被積函數

$$F(x, y, g(x, y), \dot{x}, \dot{y}, \dot{x}, g_x + \dot{y}g_y) = H(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

應用方程 (13a), 寫出積分 I 可能是逗留的條件. 我們因而有兩個方程

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_{\dot{x}} - H_x &= \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} - F_x + \frac{d}{dt}(F_{\dot{z}}g_x) - F_z g_x - F_{\dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = 0, \\
\frac{d}{dt}H_{\dot{y}} - H_y &= \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - F_y + \frac{d}{dt}(F_{\dot{z}}g_y) - F_z g_y - F_{\dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

但是，我們在微分時立刻看出

$$\frac{d}{dt}g_x = \frac{\partial \dot{z}}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}g_y = \frac{\partial \dot{z}}{\partial y}.$$

因此

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} - F_x + g_x\left(\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z\right) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - F_y + g_y\left(\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z\right) = 0.$$

如果爲了簡單起見我們以一適當的乘子 $\lambda(t)$ 寫出

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - F_z = \lambda G_z, \tag{18a}$$

並且利用關係式 (第 231 頁) $g_x = -G_x/G_z$, $g_y = -G_y/G_z$, 那麼我們得到另外兩個方程

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} - F_x = \lambda G_x, \tag{18b}$$
$$\frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - F_y = \lambda G_y. \tag{18c}$$

於是我們有以下的積分可能爲逗留的條件：如果我們設 G_x, G_y, G_z 在曲面 $G = 0$ 上不同時爲零, 那麼極值的必要條件是存在一個乘子 $\lambda(t)$, 使得三個方程 (18a, b, c) 在附帶條件 $G(x, y, z) = 0$ 下同時得到滿足；即，我們有決定函數 $x(t), y(t), z(t)$ 和乘子 $\lambda(t)$ 的四個對稱的方程.

最重要的特例是在給定的曲面 $G = 0$ 上 (設 G 的梯度不爲零) 求連接兩點 A 和 B 的最短曲線的問題，這裡有

$$F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

而歐拉微分方程爲

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \lambda G_x,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \lambda G_y,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \lambda G_z.$$

這些方程關於新參數 t 的引進是不變的. 即, 讀者可自己容易驗證, 如果 t 換成任何別的參數 $\tau=\tau(t)$, 祇要這個變換是一一的、可逆的和連續可微的, 那麼這些方程保持相同的形式. 如果我們取弧長爲新的參數, 因此 $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$, 我們的微分方程有形式

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\lambda G_x,\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\lambda G_y,\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\lambda G_z. \tag{19}$$

這些微分方程的幾何意義是, 我們問題的極值曲線的主法向量[1)] 正交於曲面 $G=0$. 我們稱這些曲線爲曲面的**測地線**. 因而, 在曲面上兩點之間的最短距離必定由一測地線弧給出.

習　題　7.4a

1. 證明一個不受外力的、約束在一給定的曲面 $G=0$ 上運動的質點的軌線也同樣是測地線. 在這個情形中, 勢能 U 等於零, 並且讀者可應用哈密爾頓原理 (第 876 頁).

2. 令 C 爲一給定曲面 $G(x,y,z)=0$ 上的曲線. 在 C 的每一點上取一段定長的而且相對於 C 是定向的垂直測地線. 測地線的自由端畫出一條曲線 C'. 證明 C' 也垂直於那些測地線段.

b. 其他類型的附帶條件

在上面討論的問題中, 我們能够消去附帶條件, 是由於解出了確定附帶條件的方程, 從而把問題直接歸結爲以前討論過的類型. 然而, 對於經常出現的其他種類的附帶條件是不可能做到這一點的. 這種類型的最重要的情形是**等週的**附帶條件. 下面是一個標準的例子: 在前面的邊條件和連續性條件下, 要使積分

$$I\{\phi\}=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\phi,\phi')dx \tag{20a}$$

是逗留的, 這裡的自變函數服從另外的附帶條件

$$H\{\phi\}=\int_{x_0}^{x_1}G(x,\phi,\phi')dx=\text{給定的常數 } c. \tag{20b}$$

1) 即, 向量 $(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$; 見第 216 頁.

特别， $F=\phi, G=\sqrt{1+\phi'^2}$ 是經典的等週問題.

這類問題不能衹靠我們以前用一個在邊界上等於零的任意函數來構造“變動的”函數 $\phi=u+\varepsilon\eta$ 的方法予以解決，因爲一般而言，這些函數 (除去 $\varepsilon=0$) 在 $\varepsilon=0$ 的鄰域内不滿足附帶條件. 然而，用一個類似在問題中最早所用的那種方法，不是引進一個函數和一個參數，而是兩個在邊界上等於零的函數 $\eta_1(x)$ 和 $\eta_2(x)$, 以及兩個參數 ε_1 和 ε_2, 我們可以得到所需的結果. 假設 $\phi=u$ 爲所求的函數，我們因此構造變動的函數

$$\phi=u+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2.$$

如果我們把這個函數代入那兩個積分，我們就把問題歸結爲：在附帶條件

$$\begin{aligned}H&=\int_{x_0}^{x_1}G(x,u+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2,u'+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2')dx\\&=M(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=c\end{aligned}$$

下，推導積分

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,u+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2,\mu'+\varepsilon_1\eta_1'+\varepsilon_2\eta_2')dx=K(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

的逗留性的必要條件；即，函數 $K(\varepsilon_1\varepsilon_2)$ 對 $\varepsilon_1=0,\varepsilon_2=0$ 是逗留的，這裡 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 滿足附帶條件

$$M(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=c.$$

根據以前有附帶條件的通常極值的結果，以及在第 862 頁給出的類似的其他原由，作一簡單的討論就可導出這一結果：

積分的逗留性質等價於存在一個常數乘子λ,使得方程$H=c$和歐拉微分方程

$$\frac{d}{dx}(F_{u'}+\lambda G_{u'})-(F_u+\lambda G_u)=0$$

成立.這結論的一個例外情形衹可能出現在函數u 滿足方程

$$\frac{d}{dx}G_{u'}-G_u=0$$

時.

證明的細節留給讀者，他可以參考這個課題的文獻[1].

習　題　7.4b

1. 證明圓柱面上的測地線是螺旋線.

2. 求下列例子的歐拉方程：

(a) $F = \sqrt{1+y'^2} + yg(x)$,

(b) $F = y''^2/(1+y'^2)^3 + yg(x)$,

(c) $F = y''^2 - y'^2 + y^2$,

(d) $F = \sqrt[4]{1+y'^2}$.

3. 設有兩個自變量，求以下例子的歐拉方程：

(a) $F = a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 + \phi^2 d$,

(b) $F = \left(\phi_{xx} + \phi_{yy}\right)^2 = (\Delta\phi)^2$,

(c) $F = (\Delta\phi)^2 + \left(\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2\right)$.

4. 求下面等週問題的歐拉方程：在條件

$$\int_{x_0}^{x_1} u^2 dx = 1$$

下，積分

$$\int_{x_0}^{x_1} (au'^2 + 2buu' + cu^2) dx$$

是逗留的.

5. 令 $f(x)$ 爲一給定的函數. 在積分條件

$$H(\phi) = \int_0^1 \phi^2 dx = K^2 \quad (\text{這裡 } K \text{ 是給定的常數})$$

下，要使積分

$$I(\phi) = \int_0^1 f(x)\phi(x) dx$$

1) 例如，見 M.R. Hestenes, Calculus of Variations and Optimal Control Theory. John Wiley and Sons, New York, 1966. R. Courant and D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, Interscience Publishers, New York, 1953, Vol. 1, Chapter IV.

是極大的. (a) 從歐拉方程求解 $u(x)$. (b) 應用哥西不等式證明在 (a) 中找到的解給出 I 的絕對極大值.

6. 利用拉格朗日乘子法, 證明經典等週問題的解是一個圓.

7. 一根密度均勻和給定長度的細線吊在兩點 A 和 B 之間. 如果重力作用於負 y 軸的方向, 細線的平衡位置是使重心有最低的可能位置. 於是這是一個使形式爲 $\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx$ 的積分在

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx$$

等於給定的常數值的這種附帶條件下的極小值問題. 證明細線將掛成一條懸鏈線.

8. 設 $y=u(x)$ 在所有具有預定邊值 $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ 的連續可微函數族 $y(x)$ 中使積分 $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ 產生最小的值. 證明 $u(x)$, 對於區間 $x_0 \le x \le x_1$ 内的所有 x, 滿足不等式

$$F_{y'y'}(x,u(x),u'(x)) \ge 0 \quad (\text{勒讓德條件})$$

9. 令 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1) 是位於 x 軸上方的兩點. 求通過這兩點的函數的圖形下面積的極值曲線, 附加的條件爲兩點之間的軌線有固定的長度.