高等工程數學 96 學年度上學期第一次期中考

範圍：抽象代數

1. 集合 Q 內有元素 a, b, c，集合內運算子有＋,＊，存在子集合 S，寫出以下名詞的定義(20 分)

   a.單子$(Q,+)$

   b.群$(Q,+)$

   c.可交換環$(Q,+,*)$

   d.域$(Q,+,*)$

   e.不變子群S

2. 對所有 Ring $(R,+,\cdot)$ 中的元素 a， $a\cdot a=a$ 成立，證明 R 是一個可交換環(5 分)

Ans.作業一 Pro.9

3. (1)證明群 G 的一個非空子集 H，作成 G 的一個子群的充分必要條件為(5 分)

(i) $\forall a,b\in H\Rightarrow ab\in H$

(ii) $\forall a\in H\Rightarrow \exists a^{-1}\in H$

(2)證明群 G 的一個非空有限子集 H 作成 G 的一個子群的的充分必要條件為如果 a 與 b 是 H 的任意兩個元素，則 $ab\in H$ (5 分)

Ans.講義定理 2,定理 3

4. G_1是 G 的子群，若G_1為阿貝爾群，證明對G_1有共軛關係的子群G_2亦是阿貝爾群 (5 分)

Ans.作業三 Pro.2

5. N_1,N_2都是 G 的不變子群，且$N_1\subset N_2\subset G$，證明N_2/N_1是G/N_1的不變子群(5 分)

Ans.作業四講解第 1 題

6. 證明一個群 $(G,\cdot)$ 與他的每一個商群$(G/H,\#)$同態，即$f{:}G\to G/H$

   且 Ker(f)=H (10 分)

Ans.講義定理 6

7. $f{:}(G,\circ)\to(G',*)$ 為一同態映射，若 Ker(f)=H，證明$(G/H,\#)$與G' 同構(10 分)

Ans.講義定理 7

8. 若 G=AB,證明 G 與$A\otimes B$同構 (5 分)

Ans.作業四 Pro.5

高等工程數學 96 學年度上學期第一次期中考

範圍：抽象代數

9. 設 G 是個群，證明 G 的中心 $C=\{g\in G \mid ga=ag, \text{ for every } a\in G\}$ 是 G 的不變子群，以及 G/C 同構於 $H=\{\gamma_a(x)=axa^{-1}, \text{ for every } x\in G \mid a\in G\}$ (10 分)

例题5 设 G 是个群. 那么 G 的中心

$$C=\{g\in G \mid ga=ag, \text{对每个 } a\in G\}$$

是 G 的不变子群，而且 G/C 同构于 G 的所有内自构作成的群 H.

证明 先证明 C 是 G 的子群. 对任意 $a\in G$，由 $e_Ga=ae_G=a$，知 $e_G\in C$. 如果 $g,h\in C$，那么对任意 $a\in G$，有

$$a(gh)=(ag)h=(ga)h=g(ha)=(gh)a,$$

因而 $gh\in C$. 如果 $g\in C$，即对任意 $a\in G$，$ag=ga$. 将此式两端两侧同乘 g^{-1}，则得

$$g^{-1}agg^{-1}=g^{-1}a=ag^{-1}=g^{-1}gag^{-1}.$$

这说明 $g^{-1}\in C$. 所以，C 是 G 的子群.

进一步，对任意 $a\in G$ 及 $g\in C$，都有

$$aga^{-1}=g(aa^{-1})=g\in C,$$

从而 C 还是 G 的不变子群.

在 §2的命题5中，我们用 γ_a 代表 G 中元素 a 所导出的 G 到 G 的内自同构映射.

$$\gamma_a(x)=axa^{-1}, \quad \text{对每个 } x\in G.$$

由于 G 到 G 的恒等自同构等于 γ_e，必为内自同构；任意两个内自同构 γ_a 和 γ_b 的合成，有

$$(\gamma_a\circ\gamma_b)(x)=a(bxb^{-1})a^{-1}=(ab)x(ab)^{-1}=\gamma_{ab}(x),$$

即 $\gamma_a\circ\gamma_b$ 也是内自同构；对任意内自同构 γ_a，都有 $\gamma_a\circ\gamma_a{}^{-1}=\gamma_e$. 所以，所有内自同构的集合 H 在映射合成之下作成一个群，

$$H=\{\gamma_a \mid a\in G\}.$$

这里要注意，H 中的元素是由 G 中元素导出来的，并不是用 G 来标号；也就是说，G 中元素 $a\neq b$，但可能使 $\gamma_a=\gamma_b$.

现在来建立一个 G 到 H 的映射 f，

$$f(a)=\gamma_a, \quad \text{对每个 } a\in G.$$

对任意 $a,b\in G$，有

$$\begin{aligned} &f(ab)\\ &=\gamma_{ab} && (f\text{ 的定义})\\ &=\gamma_a\circ\lambda_b && (\lambda_{ab}(x)=(\lambda_a\circ\lambda_b)(x), \text{每个 } x\in G)\\ &=f(a)\circ f(b). && (f\text{ 的定义}) \end{aligned}$$

所以，f 是同态映射.

因为 H 中的任意元素 γ_a 都是 G 中某元导出来的，$f(a)=\gamma_a$，故 f 是满的.

再来计算 f 的核. H 的恒等元是 G 到 G 的恒等映射 i_G. 如果 $a\in G$，$a\in \mathrm{Ker}(f)$，即 $f(a)=i_G$，那么对任意 $x\in G$，必有

$$f(a)(x)=\gamma_a(x)=axa^{-1}=i_G(x)=x.$$

从而有

$$ax=xa, \quad \text{对每个 } x\in G,$$

也就是 $a\in C$. 反之，$a\in C$，则对每个 $x\in G$ 有

$$ax=xa, \quad axa^{-1}=a,$$

从而 $\gamma_a=i_G$，$\gamma_a\in \mathrm{Ker}(f)$.

所以，$\mathrm{Ker}(f)=C$.

由同态基本定理，得 $G/C\approx H$. ∎

10. 設 G 是個阿貝爾群，證明 G 的所有階數有限的元素集合 N 是 G 的一個不變子群，並且商群 G/N 中的單位元素以外的元素之階數都是無限的 (10 分)

高等工程數學 96 學年度上學期第一次期中考

範圍：抽象代數

例题7 设 G 是个交换群. 证明：G 的所有阶数有限的元素的集合 N 是 G 的一个不变子群，且商群 G/N 的非恒等元的阶数都是无限的.

证明 $a\in G$，a 阶数有限的充分必要条件是有正整数 k 使得

$$a^k=e.$$

任取 $a,b\in N$，设有正整数 k,l 使

$$a^k=e,\quad b^l=e.$$

那么 $(ab)^{kl}=a^{kl}b^{kl}=(a^k)^l(b^l)^k=e$，从而知 $ab\in N$.

又，a 和 a^{-1} 的阶数恒相同，当 $a\in N$ 时必有 $a^{-1}\in N$.

所以 N 是 G 的子群. 又由于 G 是交换群，N 还是 G 的不变子群.

任取商群 G/N 的一个元素 gN，若 gN 之阶数有限，则必有正整数 k 使

$$N=(gN)^k=g^kN,$$

从而知 $g^k\in N$. 但 N 中元素都是有限阶的，又必有正整数 l 使 $(g^k)^l=e$，也就是 $g^{kl}=e$. 这说明，g 本身就是 N 中的元素，$gN=N$. 也就是说，gN 必然是商群 G/N 的恒等元才行，而非恒等元之阶数必无限. ∎

11. 設 G 是其子群 $A_1,\cdots,A_n$ 的內直積，證明 G/A_1 與 $A_2\cdots A_n$ 同構 (10 分)

例题 若 G 是 $A_1,\cdots,A_n$ 的内直积，则 $G/A_1\approx A_2\cdots A_n$.

证明 对任意 $g\in G$，恒有 $a_i\in A_i$，$i=1,\cdots,n$，使

$$g=a_1a_2\cdots a_n,$$

且表法唯一. 也就是说，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是由 g 唯一确定的，乘积 $a_2\cdots a_n$ 也是由 g 唯一确定的.

现规定 G 到 $A_2\cdots A_n$ 的映射 f，$f(g)=a_2\cdots a_n$，可以断言 f 是满同态映射.

首先，若 $g,h\in G$，

$$g=a_1\cdots a_n,\ a_i\in A_i;\quad h=b_1\cdots b_n,\quad b_j\in A_j,$$

那么，由于 G 是诸 A_i 的直积，A_i 的元素与 A_j 的元素可换，故

$$gh=(a_1b_1)\cdots(a_nb_n).$$

由于表法唯一，$a_2b_2\cdots a_nb_n$ 是 gh 唯一确定的，从而

$$f(gh)=(a_2b_2)\cdots(a_nb_n)=(a_2\cdots a_n)(b_2\cdots b_n)=f(g)f(h),$$

f 为同态映射.

对任意 $x\in A_2\cdots A_n$，设 $x=d_2\cdots d_n$，$d_i\in A_i$，那么

$$f(ed_2\cdots d_n)=d_2\cdots d_n=x,$$

从而 f 是满的.

最后，计算 f 的核.

若 $f(g)=e$，设 $g=a_1a_2\cdots a_n$，即应有

$$f(g)=a_2\cdots a_n=e.$$

由表法唯一性，必有 $a_2=e,\cdots,a_n=e$. 也就是 $g=a_1\in A_1$.

反过来，对任意 $a_1\in A_1$，由 $a_1=a_1e\cdots e$ 知道

$$f(a_1)=e,\quad a_1\in \mathrm{Ker}(f).$$

所以，$\mathrm{Ker}(f)=A_1$.

由群同态基本定理得 $G/A_1\approx A_2\cdots A_n$. ∎